ÁLGEBRAS DE BOOLE

Ejemplos

1) Si S es un conjunto, entonces $(\wp(S), \cup, \cap)$ es álgebra de Boole.

$$\boxed{A \vee B = A \cup B \qquad\qquad A \wedge B = A \cap B}$$

2) Sea $D_n = \{ z \in N \,/\, z \text{ divide a } n \}$ con las operaciones

$$\boxed{a \vee b = mcm\,\{a, b\} \qquad\qquad a \wedge b = mcd\,\{a, b\}}$$

Teorema

$(D_n, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole $\Leftrightarrow$ $n = p_1\, p_2 \ldots p_k$

con p_i números primos distintos dos a dos y distintos de 1.

3) El conjunto de Boole $B = \{0, 1\}$ con las operaciones definidas por las tablas siguientes es un álgebra de Boole

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4) Sea $B^n = \{ 0, 1 \}^n = \{ (x_1, x_2, ..., x_n) \ / \ x_i \in B \}$
en el que se definen las siguientes operaciones:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \vee (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, ..., x_n \vee y_n)$$
$$(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, ..., x_n \wedge y_n)$$

- elemento neutro para la suma o mínimo $0 = (0, ..., 0)$
- elemento neutro para el producto o máximo $1 = (1, ..., 1)$
- complementario $(x_1, x_2, ..., x_n)' = (x_1', x_2', ..., x_n')$

Entonces $(B^n, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole.

Teorema

Si $(A, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole, entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. absorción del neutro $1 \vee x = 1, \quad 0 \wedge x = 0$
2. involutiva $(x')' = x$

   (el complementario de cada elemento es único)
3. leyes de De Morgan

   $(x \vee y)' = x' \wedge y' \qquad (x \wedge y)' = x' \vee y'$

ISOMORFISMOS DE ÁLGEBRAS DE BOOLE

- Sean $(A, \vee, \wedge)$, $(A', \vee', \wedge')$ álgebras de Boole.

  La aplicación

  $f : A \to A'$ es un homomorfismo si

  $$f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b) \qquad\qquad f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b)$$

- Las álgebras de Boole $(A, \vee, \wedge)$ y $(A', \vee', \wedge')$ son isomorfas si existe un homomorfismo biyectivo entre ellas.

Teorema

Si $(A, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole finita entonces existe un conjunto finito S tal que $(A, \vee, \wedge)$ y $(\wp(S), \cup, \cap)$ son isomorfas.

Teorema

Si S es un conjunto finito con card S = n, entonces $(\wp(S), \cup, \cap)$ y $(B^n, \vee, \wedge)$ son álgebras de Boole isomorfas.

Teorema

Si $(A, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole finita entonces

$$\boxed{\text{card } A = 2^n, \qquad \text{para algún } n \in \mathbb{N}}$$

Ejemplos

1) Las álgebras de Boole

(D_{30}, mcm, mcd) y $(\wp(\{a, b, c\}), \cup, \cap)$ son isomorfas.

La aplicación $f : D_{30} \rightarrow \wp(\{a, b, c\})$ es un isomorfismo:

$f(1) = \varnothing$

$f(2) = \{ a \}$

$f(3) = \{ b \}$

$f(5) = \{ c \}$

$f(6) = f(2 . 3) = \{ a, b \}$

$f(10) = f(2 . 5) = \{ a, c \}$

$f(15) = f(3 . 5) = \{ b, c \}$

$f(30) = f(2 . 3 . 5) = \{ a, b, c \}$

2) Las álgebras de Boole

$(\wp(\{a, b, c\}), \cup, \cap)$ y $(\mathrm{B}^3, \vee, \wedge)$ son isomorfas.

La aplicación $f : \wp(\{a, b, c\}) \to (\mathrm{B}^3, \vee, \wedge)$ es un isomorfismo:

$f(\emptyset) = (0, 0, 0)$

$f(\{ a \}) = (1, 0, 0)$

$f(\{ b \}) = (0, 1, 0)$

$f(\{ c \}) = (0, 0, 1)$

$f(\{ a, b \}) = (1, 1, 0)$

$f(\{ a, c \}) = (1, 0, 1)$

$f(\{ b, c \}) = (0, 1, 1)$

$f(\{ a, b, c \}) = (1, 1, 1)$

VARIABLES BOOLEANAS

Los ordenadores representan la información usando bits.

Un bit (binary digit) tiene dos valores posibles

$$\begin{cases} 1 & \text{(uno)} \\ 0 & \text{(cero)} \end{cases} \qquad \begin{cases} V & \text{(verdadero)} \\ F & \text{(falso)} \end{cases}$$

(John W. Tukey, 1946)

- Una variable booleana es una variable que toma dos valores:

  {uno, cero} {verdadero, falso} {si, no}

- Una variable booleana se puede representar usando un bit.
- Las cadenas de bits son sucesiones de ceros y unos.

FUNCIONES BOOLEANAS

Definiciones

❖ Función booleana de n variables es una aplicación $f : B^n \to B$

tal que $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ $\forall\ (x_1, x_2, ..., x_n) \in B^n$.

❖ Cualquier sucesión de 2^n ceros y unos es el conjunto de valores de una función booleana.

❖ Se pueden definir $2^{(2^n)}$ funciones booleanas distintas de n variables.

❖ Conjunto de unos o conjunto de verdad de f es el conjunto

$$S(f) = \{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in B^n \ / \ f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 \}$$

Tablas de verdad

Una función booleana se puede representar por una tabla

x_1	x_2......	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_n)$
0	0......	0	$f(0, 0, ..., 0)$
0	0......	1	$f(0, 0, ..., 1)$
	....	......	....
0	1......	0	$f(0, 1, ..., 0)$
	....	......	....
1	0......	0	$f(1, 0, ..., 0)$
	....	......	....
1	1......	1	$f(1, 1, ..., 1)$

Ejemplo

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$S(f) = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

EXPRESIONES BOOLEANAS

Definición

Se define una expresión de Boole en las n variables $\{ x_1, x_2, ..., x_n \}$ de forma recursiva:

1. $x_1, x_2, ..., x_n$ son expresiones de Boole.
2. Los símbolos 0, 1 son expresiones de Boole.
3. Si $E_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $E_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ son expresiones de Boole, entonces $E_1 \vee E_2$, $E_1 \wedge E_2$, $E_1{}'$ son expresiones de Boole.
4. No existen expresiones de Boole que no puedan obtenerse por las reglas 1, 2, 3.

Propiedad

Si $E(x_1, x_2, ..., x_n)$ es una expresión de Boole en n variables, entonces define una función booleana

$f(x_1, x_2, ..., x_m) = E(x_1, x_2, ..., x_n)$ en m variables, $m \geq n$.

Ejemplo

La expresión de Boole

$$E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee x_1 \vee (x_2' \wedge x_3)$$

define una función booleana cuya tabla de verdad es

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Teorema

Si $f_1 : \mathrm{B}^n \to \mathrm{B}$ y $f_2 : \mathrm{B}^n \to \mathrm{B}$ son funciones booleanas entonces

- *la suma* $f = (f_1 \vee f_2) : \mathrm{B}^n \to \mathrm{B}$ tal que

$$f(x) = (f_1 \vee f_2)(x) = f_1(x) \vee f_2(x)$$

- *el producto* $g = (f_1 \wedge f_2) : \mathrm{B}^n \to \mathrm{B}$ tal que

$$g(x) = (f_1 \wedge f_2)(x) = f_1(x) \wedge f_2(x)$$

son funciones booleanas.

Además, los conjuntos de unos son:

$$\mathrm{S}(f_1 \vee f_2) = \mathrm{S}(f_1) \cup \mathrm{S}(f_2)$$

$$\mathrm{S}(f_1 \wedge f_2) = \mathrm{S}(f_1) \cap \mathrm{S}(f_2)$$

Ejemplo

x_1	x_2	x_3	$f_1(x_1,x_2,x_3)$	$f_2(x_1,x_2,x_3)$	$f_1 \vee f_2\ (x_1,x_2,x_3)$	$f_1 \wedge f_2\ (x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0

Propiedad

Si $f : B^n \rightarrow B$ es una función booleana, entonces existe una expresión booleana $E(x_1, x_2, ..., x_n)$ que representa a f.

Demostración

$\forall\ x = (x_1, ..., x_n) \in S(f) = \{ x \in B^n \ / \ f(x) = 1 \}$, se define el producto elemental asociado a x, como

$$E_x = E_{x_1} \wedge E_{x_2} \wedge \ldots \wedge E_{x_n}$$

$$E_{x_i} = \begin{cases} x_i & \text{si } x_i = 1 \\ x_i' & \text{si } x_i = 0 \end{cases} \qquad \forall\ i \in \{1, 2, ..., n\}$$

Una expresión de Boole que representa a f en forma de "suma de productos elementales" es

$$E(f) = \bigvee_{x \in S(f)} E_x$$

Ejemplos

1) Sea $f : \mathrm{B}^2 \rightarrow \mathrm{B}$ una función booleana definida por el conjunto

$$\mathrm{S}(f) = \{ x \in \mathrm{B}^n \ / \ f(x) = 1 \} = \{ (0, 0), (0, 1), (1, 0) \}$$

$$E_{(0,0)} = x_1' \wedge x_2'$$
$$E_{(0,1)} = x_1' \wedge x_2$$
$$E_{(1,0)} = x_1 \wedge x_2'$$

Una expresión booleana que representa a f es

$$E(f) = \bigvee_{x \in S(f)} E_x =$$

$$= E_{(0,0)} \vee E_{(0,1)} \vee E_{(1,0)} = (x_1' \wedge x_2') \vee (x_1' \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2')$$

2) Sea $f : \mathrm{B}^3 \to \mathrm{B}$ una función booleana definida por el conjunto

$$\mathrm{S}(f) = \{ x \in \mathrm{B}^{\mathrm{n}} \ / \ f(x) = 1 \} = \{ (0, 1, 1), \ (1, 0, 1), \ (1, 1, 1) \}$$

$$E_{(0,1,1)} = x_1{}' \wedge x_2 \wedge x_3$$
$$E_{(1,0,1)} = x_1 \wedge x_2{}' \wedge x_3$$
$$E_{(1,1,1)} = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

Una expresión booleana que representa a f es

$$E(f) = E_{(0,1,1)} \vee E_{(1,0,1)} \vee E_{(1,1,1)} =$$
$$= (x_1{}' \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2{}' \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES BOOLEANAS

- Una función booleana puede tener varias expresiones que la representen e interesa encontrar la más simple de todas ellas.
- La expresión como suma de productos elementales no es la más simple, en general, pero sí es el punto de partida de todos los métodos de simplificación.
- Éstos se basan en la búsqueda de pares de productos elementales que difieran solamente en una variable.

Definición

Las expresiones de Boole $E_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ y $E_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ son **equivalentes** si y sólo si representan la misma función de Boole.

Teorema

Si $E(x_1, x_2, ..., x_n)$ es una expresión de Boole en n variables y z es una variable, entonces las expresiones

- $E(x_1, x_2, ..., x_n)$
- $E*(x_1, x_2, ..., x_n, z) =$

$$= (z \wedge E(x_1, x_2, ..., x_n)) \vee (z' \wedge E(x_1, x_2, ..., x_n))$$

son equivalentes como expresiones de $n + 1$ variables.

Demostración

Sea $f : \mathrm{B}^m \rightarrow \mathrm{B}$, $m \geq n$, la función booleana que define la expresión $E\,(\,x_1, x_2, \ldots, x_n\,)$, entonces la expresión

$$E^*(\,x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ z\,)\ =$$

$$= (\,z \wedge E\,(\,x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\,)\,) \vee (\,z' \wedge E\,(\,x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\,)\,) =$$

$$= (\,z \vee z'\,) \wedge E\,(\,x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\,) = E\,(\,x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n\,)$$

define la misma función booleana.

A continuación se presentan dos métodos que sistematizan la simplificación de expresiones de Boole en forma de sumas de productos elementales:

- Mapas de Karnaugh (método gráfico)
- Método de Quine — McCluskey (método algorítmico)

MAPAS DE KARNAUGH

Maurice Karnaugh (1924)

Sea $f : B^n \to B$ una función booleana

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad \forall\, x_i \in B.$$

El mapa de Karnaugh de una expresión de Boole de n variables es una cuadrícula formada por 2^n cuadrados.

- cada cuadrado representa a un elemento $x \in B^n$
- cada cuadrado representa a su expresión elemental asociada E_x
- en los cuadrados correspondientes a los elementos $x \in B^n$ tales que $f(x) = 1$ se escribe un 1.

	y	y´
x	11	10
x´	01	00

	y	y	y´	y´
x	110	111	101	100
x´	010	011	001	000
	z´	z	z	z´

	y	y	y'	y'	
x	1100	1110	1010	1000	t'
x	1101	1111	1011	1001	t
x'	0101	0111	0011	0001	t
x'	0100	0110	0010	0000	t'
	z'	z	z	z'	

Para simplificar una expresión booleana E se procede así:

1. Se consideran todos los rectángulos simples, del mayor tamaño posible, que recubran la zona de unos del mapa de Karnaugh, aunque se solapen.
2. Se eliminan los rectángulos simples que estén contenidos en la unión de otros de forma que la zona de unos quede recubierta por el menor número de rectángulos del mayor tamaño posible.
3. La suma de las expresiones correspondientes a los rectángulos que quedan al final del proceso es una expresión simplificada de la expresión original E.
4. La expresión simplificada depende de las elecciones efectuadas en el proceso por lo que no es necesariamente única.

MÉTODO DE QUINE – McCLUSKEY

- Willard van Orman Quine (1908–2000)

  "*Nuevos fundamentos de Lógica Matemática*" (1937)

  "*Word and Object*" (1960)

- Edward J. McCluskey (1929)

Sea $f : \mathrm{B}^n \to \mathrm{B}$ una función booleana

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad \forall\, x_i \in \mathrm{B}.$$

El método de Quine–McCluskey consiste en agrupar productos que difieren en una única variable, pero en vez de utilizar productos elementales, utiliza los elementos de S (f).

1. Se forma una tabla con los unos de la función

$$S(f) = \{ x \in B^n \,/\, f(x) = 1 \}$$

por bloques, ordenados de mayor a menor según el número de unos que contienen.

Encabezan la tabla las variables de la función $(x_1, x_2, ..., x_n)$

2. Se compara cada elemento de cada bloque con todos los del bloque inmediatamente inferior de la forma siguiente:

Si dos elementos se diferencian en un único dígito, se les asigna el mismo índice.

Se forma otra tabla reduciendo las filas con el mismo índice, sustituyendo la variable que toma distinto valor por un guión — .

3. Se repite el paso 2 con la nueva lista y se continúa este proceso.

Finaliza el proceso cuando las filas que quedan no son comparables, porque se diferencian en más de un dígito.

4. Se consideran las filas no comparables entre sí de todas las tablas, es decir, las que no tienen índice.

Se recogen los resultados en otra tabla cuyas columnas son los $x \in \mathrm{B}^n$ con $f(x) = 1$ y cuyas filas son las expresiones no comparables.

5. Se marcan las coincidencias entre filas y columnas, y se elige un único elemento de cada columna con el siguiente criterio:

- primero se eligen aquellos para los que existe una única posibilidad
- para los restantes se elige la menor cantidad posible de entre aquellos con mayor cantidad de guiones.

Una fila es redundante si sus elementos están incluidos en las restantes filas.

6. La expresión de Boole en forma de "suma de productos mínima" es la correspondiente a la suma de los productos elementales asociados a las filas no redundantes.

Ésta dependerá de las elecciones hechas en el proceso.